EVOLUCIÓN DE LA IDEA DE INTEGRAL

Francisco Javier Pérez González

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Septiembre de 2021

Índice

1. Evolución de la idea de integral

1.1. Problemas de cuadraturas en las matemáticas griegas

[1] Los problemas de cuadraturas son problemas geométricos que consisten en lo siguiente: dada una figura, construir un cuadrado con área igual a la de la figura dada. Esta construcción debía hacerse con regla no graduada y compás, siguiendo unas normas precisas. Según lo establecido en los *Elementos* de Euclides (*c.* 300 a.C.) la construcción debe constar de un número finito de pasos, cada uno de ellos consistente en:

- Trazar una recta que una dos puntos.
- Trazar una circunferencia de centro y radio arbitrarios.
- Intersecar dos de las figuras anteriores.

Son famosos los problemas de la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo y la inscripción de polígonos regulares en una circunferencia. En la antigua Grecia se sabía cuadrar cualquier polígono.

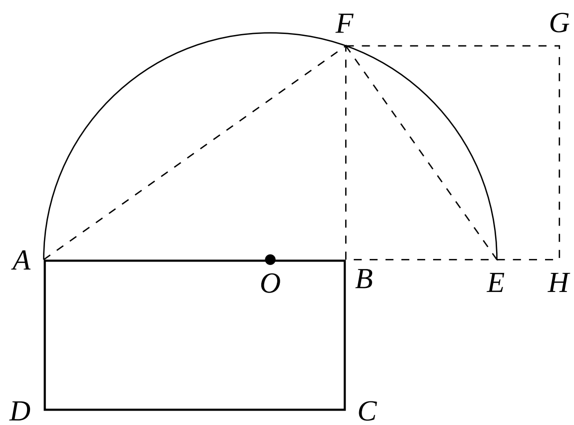


Figura 1. Cuadratura de un rectángulo

Para cuadrar el rectángulo $ABCD$ de la figura 1 se procede de la forma siguiente:

1) Se prolonga el lado AB y se determina sobre él un punto E tal que $BE = BC$.

2) Se traza con centro en el punto medio O de AE una semicircunferencia de radio OE.

3) Se traza por B una perpendicular a AE y se determina su punto de corte F con la semicircunferencia.

4) El segmento FB es el lado de un cuadrado cuya área es igual a la del rectángulo $ABCD$. Esto es consecuencia de que la altura FB de un triángulo rectángulo AFE es media proporcional entre las dos partes en que divide a la hipotenusa, es decir, $FB/AB = BE/FB$, por lo que $FB^2 = AB.BE = AB.BC$.

[1] Para escribir estas notas históricas he seguido de cerca los trabajos de Kirsti Andersen [1], Israel Kleiner [4], González Urbaneja [3] y H. J. M. Bos [2].

A partir de aquí es fácil obtener la cuadratura de un triángulo, lo que permite obtener la cuadratura de cualquier polígono descomponiéndolo en triángulos. Los matemáticos griegos inventaron un procedimiento, que se conoce con el nombre de "exhausción", por el cual podían lograr la cuadratura de algunas regiones delimitadas por curvas. Se atribuye a Eudoxo de Cnido (*c.* 400 - 347 a.C.) la invención de este método, que fue perfeccionado posteriormente por Arquímedes (*c.* 287 - 212 a.C.). El siguiente es un notable ejemplo de su aplicación.

1.1.1. Cuadratura de un segmento de parábola por Arquímedes

Teorema. El área del segmento parabólico PVQ es igual a cuatro tercios el área del triángulo inscrito $\triangle PVQ$.

Demostración. Esta demostración aparece en una carta que escribe Arquímedes a su amigo Dositheus, obra que se conoce con el nombre de *Sobre la Cuadratura de la Parábola*. La demostración consiste en hacer una descomposición exhaustiva del segmento parabólico por medio de triángulos de una forma muy ingeniosa. Empezaremos explicando la construcción geométrica de la figura 2.

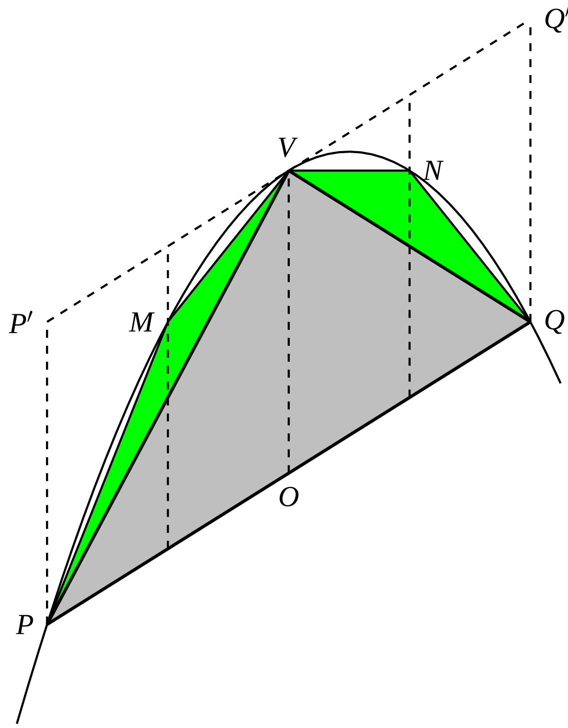


Figura 2. Cuadratura de un segmento de parábola

Una *cuerda* PQ de una parábola es un segmento que une dos de sus puntos. La región plana acotada, cuya frontera está formada por la cuerda PQ y el arco de la parábola comprendido entre los puntos P y Q se llama un *segmento parabólico*. El *vértice* de un segmento parabólico es el punto de la parábola en el cual la tangente es paralela a la cuerda que define el segmento.

Se verifica que el vértice de un segmento parabólico PVQ es el punto intersección con la parábola de la recta paralela al eje de la parábola que pasa por el punto medio $O = \frac{1}{2}(P+Q)$ del segmento PQ.

El triángulo $\triangle PVQ$ cuya base es el segmento PQ y cuyo otro vértice es el vértice V del segmento parabólico le llamaremos el triángulo inscrito.

En la figura 2 se han representado también los triángulos $\triangle PMV$ y $\triangle VNQ$ inscritos, respectivamente, en los segmentos parabólicos determinados por las cuerdas PV y VQ.

La primera parte de la demostración consiste en calcular el área de los dos triángulos $\triangle PMV$ y $\triangle VNQ$. Arquímedes demuestra que

$$\lambda(\triangle VNQ) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle VOQ), \qquad \lambda(\triangle VMP) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle VOP)$$

Por tanto

$$\lambda(\triangle VNQ) + \lambda(\triangle VMP) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle PVQ) \tag{1}$$

Llamando S al área del triángulo $\triangle PVQ$, el área de los dos nuevos triángulos es $\frac{1}{4}S$. Naturalmente, este proceso se puede repetir ahora con cada uno de los cuatro segmentos parabólicos determinados por las cuerdas PM, MV, VN y NQ inscribiendo en ellos los respectivos triángulos, la suma de cuyas áreas será igual a $\frac{1}{16}S$. Y puede repetirse indefinidamente.

Nosotros ahora acabaríamos calculando el área del segmento parabólico por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}S$$

Pero Arquímedes, que no sabe de convergencia de series ni falta que le hace, razona de forma muy elegante por medio de la doble reducción al absurdo usual en la matemática griega.

Para ello hace uso de la llamada *propiedad arquimediana* o *axioma de Arquímedes*. Este axioma aparece en el libro de Arquímedes *La Esfera y el Cilindro* así como en *Sobre la Cuadratura de la Parábola* y en *Espirales*. Al parecer, dicho axioma fue ya formulado por Eudoxo. Como sabemos, la propiedad arquimediana establece que:

> *Dadas magnitudes cualesquiera $a > 0$ y $b > 0$, siempre es posible, por pequeña que sea a y grande que sea b, conseguir que un múltiplo conveniente de a exceda a b, es decir $na > b$ para algún número natural n.*

Partiendo de la propiedad arquimediana se deduce fácilmente el siguiente resultado, llamado *principio de convergencia de Eudoxo*, en el que se basa el llamado *método de exhausción* griego:

> *Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este procesos de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano.*

Arquímedes razona como sigue. Sea K el área del segmento parabólico PVQ.

(I) Supongamos que $K > \frac{4}{3}S$; es decir, que $K - \frac{4}{3}S > 0$.

Como el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico PVQ es la mitad del área del paralelogramo circunscrito $PP'QQ'$, la cual, a su vez, es mayor que el área del segmento, se sigue que el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico es mayor que la mitad del área de dicho segmento, lo que permite aplicar el principio de convergencia de Eudoxo.

Por tanto, en la sucesión de áreas

$$K, K-S, K-(S+\frac{1}{4}S), K-(S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{16}S), \dots$$

cada una es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del citado principio, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que

$$K - \frac{4}{3}S > K - \left(S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S\right)$$

Esto implica que

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S > \frac{4}{3}S$$

lo que es contradictorio con la igualdad, conocida por Arquímedes, que dice que:

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}S - \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}S \tag{2}$$

la cual implica que $S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S$. Por tanto, no puede ser $K > \frac{4}{3}S$.

(II) Supongamos que $K < \frac{4}{3}S$; es decir, que $\frac{4}{3}S - K > 0$.

Como cada una de las áreas $S, \frac{1}{4}S, \frac{1}{16}S, \dots, \frac{1}{4^n}S$ es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del principio de convergencia de Eudoxo, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que $\frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S - K$. Entonces

$$\frac{4}{3}S - K > \frac{1}{4^n}S > \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}S - \left(S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S\right)$$

Lo que implicaría que

$$K < S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S$$

Que es absurdo pues la suma de la derecha es el área de un polígono inscrito en el segmento parabólico. Por tanto, no puede ser $K < \frac{4}{3}S$. La única posibilidad es $K = \frac{4}{3}S$. $\square$

1.1.2. *El Método* de Arquímedes

En su tratado *El Método*, que se creía perdido y fue descubierto en 1906, Arquímedes obtiene la cuadratura de la parabola por medios mecánicos usando el principio de la palanca. Aunque el propio Arquímedes *reconoce que esa forma de proceder no es una demostración*, merece la pena decir algo sobre ella.

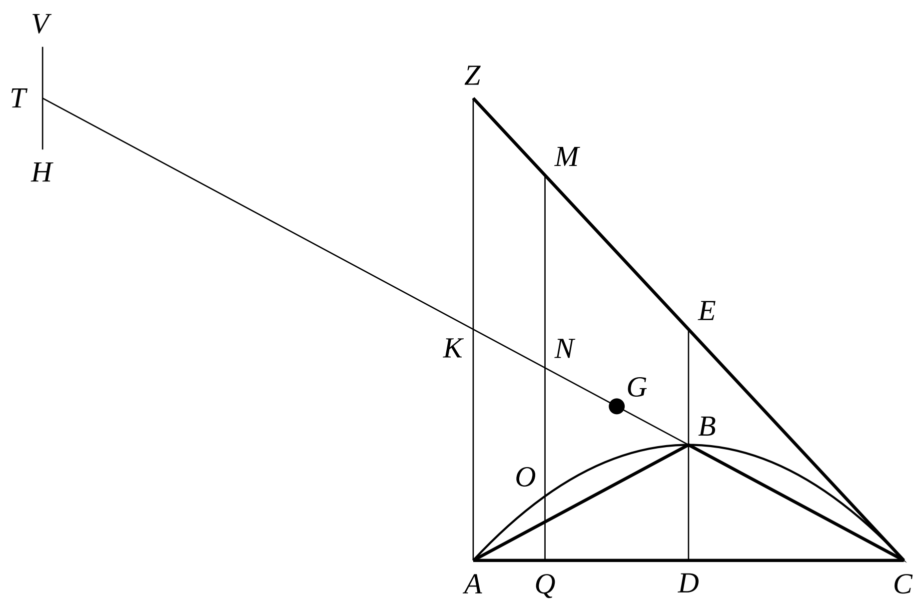


Figura 3. El *Método* de Arquímedes

La recta CZ es la tangente a la parábola en C, B es el vértice del segmento parabólico. El segmento AZ es perpendicular a la cuerda AC, CT es la recta que pasa por el punto C y el vértice B de forma que K es el punto medio del segmento CT. Se considera CT como un brazo de palanca con fulcro en K.

Por ser ABC una parábola, se sabe que la subtangente ED en un punto C es igual al doble de la abscisa BD (conviene imaginarse la parábola girada 90 grados), es decir, $ED = 2BD$, de donde, $EB = BD$. Deducimos, por la semejanza de triángulos en la figura, que $MN = NQ$ y ZK=KA.

Arquímedes demuestra en *Sobre la Cuadratura de la Parábola* que

$$\frac{CA}{AQ} = \frac{MQ}{QO}$$

Y, como también es $\dfrac{CA}{AQ} = \dfrac{CK}{KN}$, y por construcción es $TK = CK$, obtenemos que

$$\frac{TK}{KN} = \frac{MQ}{QO} \Longleftrightarrow TK.QO = KN.MQ$$

Si ahora trasladamos al punto T un segmento de longitud igual a QO y lo ponemos como en la figura el segmento VH de modo que su centro de gravedad sea el punto T, la igualdad anterior nos dice que el segmento $VH = QO$ queda equilibrado por el segmento MQ, pues el producto de dichos segmentos por la longitud correspondiente del brazo de palanca con fulcro en K es la misma. Obsérvese que N es el centro de gravedad del segmento MQ. Deducimos que K es el centro de gravedad de los segmentos VH y MQ.

Análogamente puede razonarse con cualquier paralela al eje de la parábola ED, todas ellas estarán en equilibrio con los segmentos determinados sobre ellas por el segmento parabólico trasladados al punto T, de manera que el centro de gravedad de cada par de segmentos será el punto K.

Ahora bien, los segmentos paralelos a DE *"componen"* el triángulo $\triangle AZC$ y los correspondientes segmentos dentro del segmento parabólico *"componen"* dicho segmento parabólico. Por tanto el triángulo AZC *"permaneciendo en su lugar"*, estará en equilibrio respecto del punto K con el segmento parabólico trasladado hasta tener su centro de gravedad en T, de manera que el centro de gravedad del conjunto de ambos será el punto K.

Dividimos ahora CK por el punto G de forma que CK sea el triple de KG, el punto G será el centro de gravedad del triángulo AZC,y puesto que el triángulo AZC, "permaneciendo en su lugar" está en equilibrio, respecto del punto K, con el segmento parabólico ABC, trasladado con centro de gravedad en T, y que G es el centro de gravedad del triángulo AZC, se verifica, por consiguiente, que la razón del triángulo AZC al segmento parabólico ABC colocado alrededor del centro T es igual a la razón de TK a KG. Ahora bien, siendo TK triple de KG, el triángulo AZC será triple del segmento parabólico ABC. Además, el triángulo AZC es cuádruple del triángulo inscrito ABC, ya que ZK es igual que KA y KA es doble de BD al ser AD igual que DC. Concluimos que el segmento parabólico ABC equivale a cuatro tercios del triángulo inscrito ABC. $\square$

1.1.3. Área de una espiral

El siguiente ejemplo de cuadratura sigue un procedimiento que, traducido a las notaciones actuales, es prácticamente el mismo de la integral de Riemann.

La espiral de Arquímedes es la curva que describe un punto material que se mueve con velocidad uniforme a lo largo de una semirrecta que gira con velocidad angular uniforme alrededor de su extremo. Es un ejemplo de las llamadas *curvas mecánicas*. La ecuación polar de una espiral de Arquímedes es de la forma $\rho = a\vartheta$, donde $a > 0$ es una constante.

teorema. El área del primer ciclo de una espiral es igual a una tercera parte del área del círculo circunscrito.

Demostración. Consideremos una espiral de Arquímedes de ecuación polar $\rho = a\vartheta$ y calculemos el área cuando el ángulo polar varía desde 0 a 2π, es decir, de la primera vuelta de la espiral. El radio del círculo circunscrito es $2\pi a$. Para ello dividimos este círculo en sectores de amplitud $\vartheta = 2\pi/n$, desde $\vartheta = 2\pi k/n$ a $\vartheta = 2\pi(k+1)/n$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$. En cada sector examinamos el arco de espiral que queda dentro del mismo y acotamos el área correspondiente a dicho arco de espiral entre las áreas de dos sectores circulares. Teniendo en cuenta que el área de un sector circular de radio r y amplitud φ radianes es $\frac{1}{2}r^2\varphi$, resulta que el área de sector circular más grande inscrito en cada arco de espiral es $\frac{1}{2}(a2\pi k/n)^2(2\pi/n)$, y el área de sector circular más pequeño circunscrito a cada arco de espiral es $\frac{1}{2}(a2\pi(k+1)/n)^2(2\pi/n)$. Deducimos que el área, S, de la espiral verifica que:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2 \frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi^3 a^2}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 < S < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2 \frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi^3 a^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

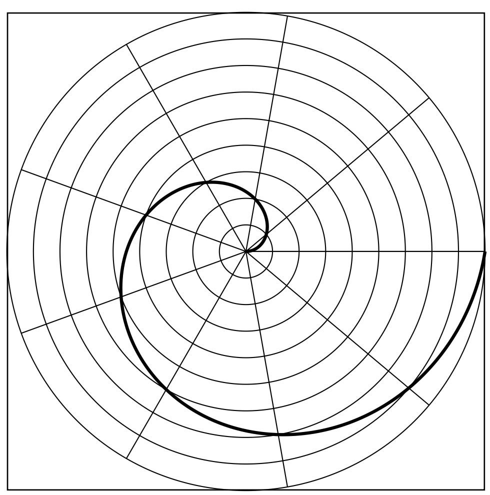


Figura 4. Cuadratura de una espiral

Arquímedes conocía que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Usando este resultado podemos escribir la desigualdad anterior en la forma:

$$4\pi^3 a^2 \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) < S < 4\pi^3 a^2 \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Pongamos $K = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$ que es una tercera parte del área del círculo circunscrito. Restando K en la desigualdad anterior y haciendo operaciones sencillas, obtenemos que:

$$K\left(-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right) < S-K < K\left(\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right);$$

y como $1/n^2 \leqslant 1/n$, obtenemos que $-2K/n < S-K < 2K/n$. Usando ahora el axioma de Arquímedes se concluye que $S = K$. □

1.2. La integración antes del Cálculo

1.2.1. Los indivisibles de Cavalieri

El método de integración geométrica que se consideraba ideal durante la primera mitad del siglo XVII era el método de exhausción que había sido inventado por Eudoxo y perfeccionado por Arquímedes. El nombre es desafortunado porque la idea central del método es la de evitar el infinito y por lo tanto este método no lleva a un "agotamiento" de la figura a determinar.

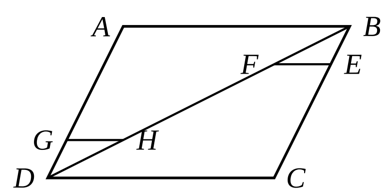
Entre los matemáticos del siglo XVII era general el deseo de encontrar un método para obtener resultados y que, a diferencia del método de exhausción, fuera directo. Y mejor que mejor si el nuevo método, aparte de dar resultados, pudiera ser utilizado para demostrarlos.

El camino que siguieron fue el que se deriva de una concepción intuitiva inmediata de las magnitudes geométricas. Se imaginaron un área como formada, por ejemplo, por un número infinito de líneas paralelas. Kepler ya había hecho uso de métodos infinitesimales en sus obras; el interés que se tomó en el cálculo de volúmenes de toneles de vino dio como resultado un libro *Nova stereometria doliurum vinariorum* (1615). En él consideraba sólidos de revolución como si estuvieran compuestos de diversas maneras por una cantidad infinita de partes sólidas. Por ejemplo, consideraba una esfera como formada por un número infinito de conos con vértice común en el centro y base en la superficie de la esfera. Esto le conducía al resultado de que la esfera es igual en volumen al cono que tiene como altura el radio de la esfera y como base un círculo igual al área de la esfera, es decir un círculo con el diámetro de la esfera como radio.

Galileo tenía la intención de escribir un libro sobre indivisibles, pero este libro nunca se publicó.

Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), discípulo de Galileo y profesor en la Universidad de Bolonia, publicó en 1635 un tratado *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione*

Promota en el que, siguiendo ideas de Kepler y Galileo, desarrolló una técnica geométrica para calcular cuadraturas, llamada *método de los indivisibles*. En este método, un área de una región plana se considera formada por un número infinito de segmentos paralelos, cada uno de ellos se interpreta como un rectángulo infinitamente estrecho; un volumen se considera compuesto por un número infinito de áreas planas paralelas. A estos elementos los llama los *indivisibles* de área y volumen respectivamente. En líneas generales los "indivisibilistas" mantenían, como expresa Cavalieri en sus *Exercitationes Geometricae Sex* (1647), que *una línea está hecha de puntos como una sarta de cuentas; el plano está hecho de líneas, como un tejido de hebras y un sólido de áreas planas como un libro de hojas*.



La forma en que se aplicaba el método o principio de Cavalieri puede ilustrarse como sigue. Para demostrar que el paralelogramo $ABCD$ tiene área doble que cualquiera de los triángulos ABD o BCD, hace notar que cuando $GD = BE$, se tiene que $GH = FE$. Por tanto los triángulos ABD y BCD están constituidos por igual número de líneas iguales, tales como GH y EF, y por tanto sus áreas deben ser iguales.

1.2.2. Cuadratura de la cicloide por Roberval

En 1630, Mersenne, propuso a sus amigos matemáticos hacer la cuadratura de la cicloide. Esta fue llevada a cabo por Gilles Personne de Roberval en 1634, utilizando esencialmente el método de los indivisibles de Cavalieri. Recuerda que la cicloide es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar.

En la figura 5, sea $QMNS$ la mitad de un arco de la cicloide generada por el círculo de radio r centrado en O. El área del rectángulo $QMNP$ es el doble del área del círculo. Construimos segmentos de línea infinitesimales horizontales, AB, con longitud determinada por la distancia horizontal entre el diámetro PQ y la circunferencia. Cada punto C de la cicloide lo sometemos a una traslación horizontal hasta el punto D, según el correspondiente segmento $AB = CD$, y así obtenemos la curva QRN, llamada compañera de la cicloide. Por la construcción realizada, las secciones horizontales del semicírculo y de la región comprendida entre la cicloide y su curva compañera son segmentos

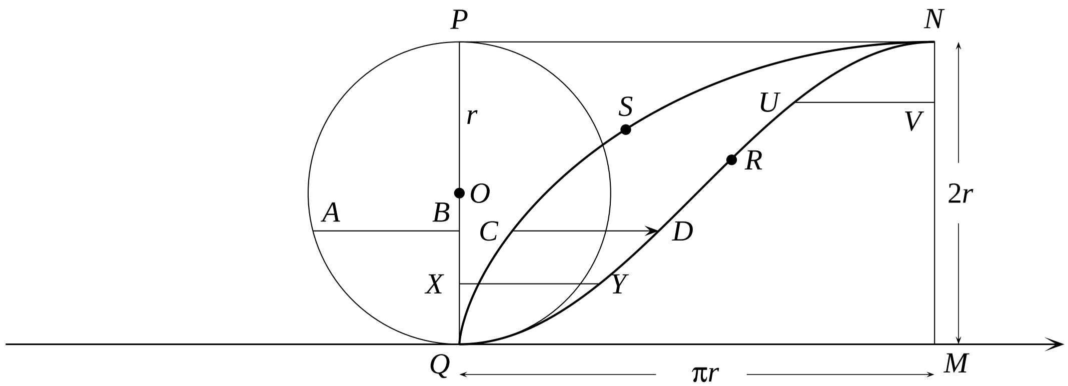


Figura 5. Cuadratura de la cicloide

de igual longitud, por lo que dicha región tiene área igual a la mitad del circulo. Por otra parte, la curva compañera de la cicloide divide en dos partes iguales al rectángulo $QMNP$, pues, como Roberval demostró, las secciones horizontales de altura a y $2r-a$ dan en cada una de las partes en que dicha curva divide al rectángulo, segmentos iguales XY y UV. Deducimos así que el área encerrada por la mitad de un arco de cicloide es $\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2$. Por tanto, concluimos que el área encerrada por un arco de la cicloide es tres veces el área del círculo que la genera.

Los matemáticos no se mostraban de acuerdo acerca del valor que había que dar a una demostración por el método de los indivisibles. La mayoría de los que se preocupaban de la cuestión consideraban el método de los indivisibles sólo como un método heurístico y creían que era aún necesaria una demostración por exhausción.

1.2.3. Parábolas e hipérbolas de Fermat

La cuadratura de las curvas definidas por $y = x^n$ donde n es un número natural o bien un entero negativo $n \neq -1$, había sido realizada para $n = 1, 2 \ldots, 9$ por Cavalieri, aunque podemos remontarnos hasta Arquímedes que había resuelto geométricamente los casos correspondientes a $n = 1, 2, 3$. Fermat, con una ingeniosa idea, logró obtener la cuadratura de áreas limitadas por arcos de hipérbolas generalizadas $x^n y^m = 1$ ($m, n \in \mathbb{N}$).

Fermat seguía un método clásico de exhausción, pero con una idea feliz que consistió en considerar rectángulos infinitesimales inscritos en la figura a cuadrar cuyas bases estaban en progresión geométrica. Fermat considera al principio las hipérbolas $yx^n = k$ y manifiesta:

Digo que todas estas infinitas hipérbolas, excepto la de Apolonio, que es la primera, *pueden ser cuadradas por el método de la progresión geométrica, de acuerdo a un procedimiento uniforme general.*

Vamos a hacernos una idea de cómo calculaba Fermat la cuadratura de la hipérbola generalizada $y = x^{-2}$ para $x \geqslant a$. Usaremos notación y terminología actuales.

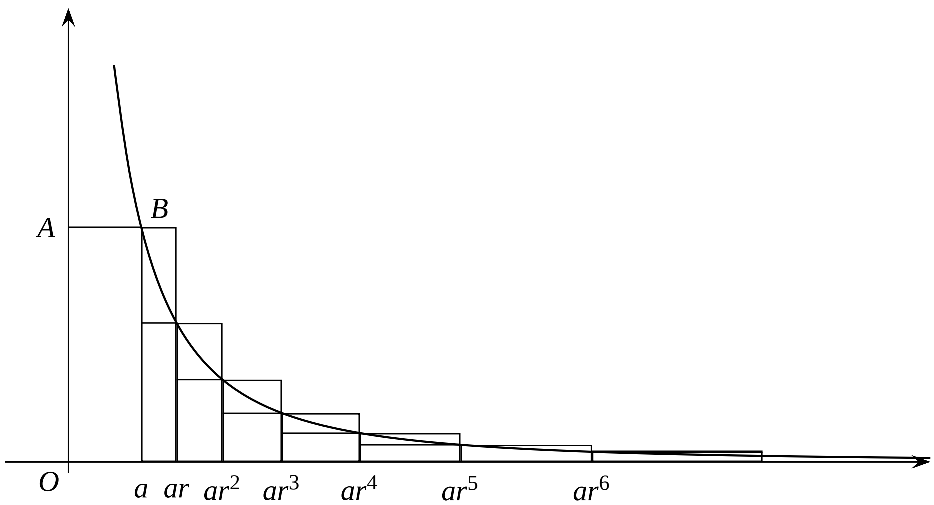


Figura 6. Cuadratura de la hipérbola de Fermat $y = x^{-2}$

Elegimos un número $r > 1$ y consideremos los puntos de abscisas $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$. Los rectángulos inscritos (ver figura 6) tienen área

$$(ar-a)\frac{1}{(ar)^2} + (ar^2-ar)\frac{1}{(ar^2)^2} + (ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^3)^2} + \cdots = \frac{r-1}{ar^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k} = \frac{1}{ar}$$

El área de los rectángulos circunscritos viene dada por

$$(ar-a)\frac{1}{a^2} + (ar^2-ar)\frac{1}{(ar)^2} + (ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^2)^2} + \cdots = \frac{r-1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k} = \frac{r}{a}$$

Por tanto, llamando S al área bajo la curva, tenemos que

$$\frac{1}{ar} < S < \frac{r}{a}$$

Como esta desigualdad es válida para todo $r > 1$, concluimos que $S = \dfrac{1}{a}$. Observa que dicho valor es precisamente el área del rectángulo $OABa$.

El razonamiento de Fermat tiene detalles muy interesantes que se pierden usando la terminología y símbolos actuales. Vamos a reproducir parte de su razonamiento. Fermat se apoya en una propiedad de las progresiones geométricas de razón menor que la unidad, que enuncia como sigue:

> *Dada una progresión geométrica cuyos términos decrecen indefinidamente, la diferencia entre dos términos consecutivos es al más pequeño de ellos, como el mayor es a la suma de los términos restantes.*

Llamemos $R_1, R_2, R_3, \ldots$ a las áreas de los sucesivos rectángulos y S a la suma de todas ellas. Como se trata de una progresión geométrica decreciente, se tiene que:

$$\frac{R_1 - R_2}{R_2} = \frac{R_1}{S - R_1}$$

Simplificando, resulta

$$S - R_1 = OA.AB = \frac{1}{a}$$

Dice Fermat:

> [...] *si ahora añadimos* [a ambos miembros de esta igualdad] *el rectángulo R_1 que a causa de las infinitas subdivisiones, se desvanece y queda reducido a nada, alcanzamos la conclusión, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes... No es difícil extender esta idea a todas las hipérbolas definidas anteriormente excepto la que ha sido indicada* [la hipérbola de Apolonio].

Vemos cómo en las cuadraturas de Fermat de hipérbolas y parábolas generalizadas, subyacen los aspectos esenciales de la integral definida:

- La división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños.
- Aproximación de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales de altura dada por la ecuación analítica de la curva.
- Un intento de expresar algo parecido a un límite de dicha suma cuando el número de elementos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeños.

1.2.4. La integración aritmética de Wallis

Jhon Wallis (1616 - 1703) publicó en 1655 un tratado *Arithmetica infinitorum* ("La Aritmética de los infinitos") en el que aritmetizaba el método de los indivisibles de Cavalieri. Para ilustrar el método de Wallis consideremos el problema de calcular el área bajo la curva $y = x^k$ ($k = 1, 2, \ldots$) y sobre el segmento $[0, a]$ (ver figura (7)). Siguiendo a Cavalieri, Wallis considera la región PQR formada por un número infinito de líneas verticales paralelas, cada una de ellas con longitud igual a x^k. Por tanto, si dividimos el segmento $PQ = AB = a$ en n partes de longitud $h = a/n$, donde n es infinito, entonces la suma de estas infinitas líneas es del tipo

$$0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \cdots + (nh)^k \tag{3}$$

Análogamente, el área del rectángulo $ABCD$ es

$$a^k + a^k + a^k + \cdots + a^k = (nh)^k + (nh)^k + (nh)^k + \cdots + (nh)^k \tag{4}$$

La razón entre el área de la región PQR y el rectángulo $ABCD$ es

$$\frac{\text{Área } PQR}{\text{Área } ABCD} = \frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k} \tag{5}$$

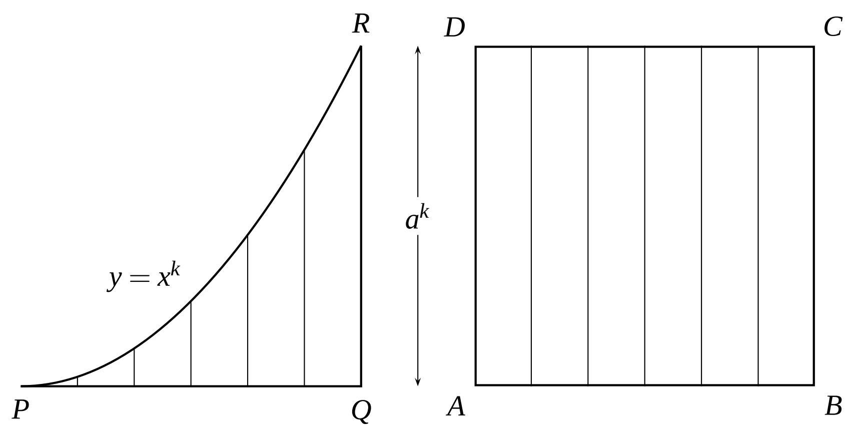


Figura 7. Comparando indivisibles

Esto lleva a Wallis a estudiar el valor de la expresión (5) para $n = \infty$[2]. Después de estudiar varios casos para valores de $k = 1, 2, 3$ haciendo, en cada caso, sumas para distintos valores de $n = 1, 2, 3, 4$, Wallis observa ciertas regularidades en las mismas y, con tan débil base, acaba afirmando que para $n = \infty$ y para todo $k = 1, 2, \ldots$, se verifica que:

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k} = \frac{1}{k+1} \tag{6}$$

Naturalmente, de aquí deduce el valor del área de la región PQR:

$$\frac{\text{Área } PQR}{\text{Área } ABCD} = \frac{\text{Área } PQR}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow \text{Área } PQR = \frac{a^{k+1}}{k+1} \quad k = 1, 2, 3 \ldots \tag{7}$$

[2] Fue precisamente Wallis quien introdujo en 1655 en la obra *De Sectionibus Conicis*, el símbolo del "lazo del amor", ∞, con el significado de "infinito".

Este resultado ya era conocido anteriormente, pero Wallis no se paraba aquí y extendía la validez de la igualdad (6) a todos los exponentes racionales positivos. Su peculiar razonamiento tiene interés pues en él se basó Newton para obtener la serie binomial. Lo esencial del mismo puede resumirse, en términos actuales, como sigue.

Definamos el índice, $\sigma(f)$, de una función f mediante la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{f(n)+f(n)+f(n)+\cdots+f(n)} = \frac{1}{\sigma(f)+1} \tag{8}$$

suponiendo que dicho límite tenga sentido. Por ejemplo, (6) nos dice que el índice de la función $f_k(x) = x^k$ es $\sigma(f_k) = k$ para $k = 1, 2, \ldots$.

Wallis observó que, dada una progresión geométrica de potencias de x como, por ejemplo $1, x^3, x^5, x^7, \ldots$, la correspondiente sucesión de índices $0, 3, 5, 7, \ldots$ forman una progresión aritmética. Como $\sigma(f_k) = k$, esta observación es trivial, pero le permite dar un atrevido salto adelante, de manera que mediante una audaz interpolación establece (sin demostración) que una conclusión análoga puede deducirse para la progresión geométrica

$$1, \sqrt[q]{x}, (\sqrt[q]{x})^2, \ldots, (\sqrt[q]{x})^{q-1}, x$$

de manera que la sucesión de sus índices debe formar una progresión aritmética, de donde se sigue que debe ser $\sigma\big((\sqrt[q]{x})^p\big) = p/q$ para $p = 1, 2, \ldots, q$. De esta forma obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{0})^p + (\sqrt{1})^p + (\sqrt{2})^p + (\sqrt{3})^p + \cdots + (\sqrt{n})^p}{(\sqrt{n})^p + (\sqrt{n})^p + (\sqrt{n})^p + (\sqrt{n})^p + \cdots + (\sqrt{n})^p} = \frac{1}{p/q+1}$$

Wallis estaba convencido de la validez de su método, conocido posteriormente como *interpolación de Wallis*, que tuvo importancia en el siglo XVIII. Puede considerarse como un intento de resolver el siguiente problema:

> *Dada una sucesión P_k, definida para valores enteros de k, encontrar el significado de P_α cuando α no es un número entero.*

Además, Wallis deduce que *necesariamente debe ser* $(\sqrt[q]{x})^p = x^{p/q}$. Será Newton, poco más tarde, quien siguiendo los pasos de Wallis, introducirá el uso de potencias fraccionarias y negativas.

Wallis, incluso llega a afirmar que la igualdad

$$\int_0^a x^r \, \mathrm{d}x = \frac{a^{r+1}}{r+1} \tag{9}$$

no es válida solamente para exponentes r racionales, sino también para otros como $r = \sqrt{3}$ pero, naturalmente, no puede dar ninguna justificación.

Obtenida, a su manera, la cuadratura fundamental (9), Wallis intenta calcular la integral

$$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Dicha integral representa el área bajo la semicircunferencia de centro $(1/2,0)$ y radio $1/2$, su valor es, por tanto, $\pi/8$. Wallis quería obtener dicho resultado evaluando directamente la integral. No tuvo éxito en este empeño que Newton habría de resolver posteriormente, pero sus resultados le llevaron a obtener la llamada *fórmula de Wallis*

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdots}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdots}$$

1.2.5. El resultado fundamental de Barrow

Barrow estuvo muy cerca de descubrir la relación inversa entre problemas de tangentes y de cuadraturas, pero su conservadora adhesión a los métodos geométricos le impidió hacer uso efectivo de esta relación. Veamos cómo aparece esa relación tal como se expone en la Lección X, Proposición 11 de las *Lectiones Geometricae*.

En la figura (8) se han representado dos curva $y = f(x)$ e $y = g(x)$. El segmento AD representa el eje de abscisas donde toma valores x. La cantidad $g(x)$ representa el valor del área bajo la gráfica de f comprendida entre el punto A y x. Dado un punto de abscisa D, se trata de probar que la pendiente de la tangente a $y = g(x)$ en el punto F, es decir en el punto $(D, g(D))$, es igual a $f(D) = DE$. La demostración de Barrow es geométrica.

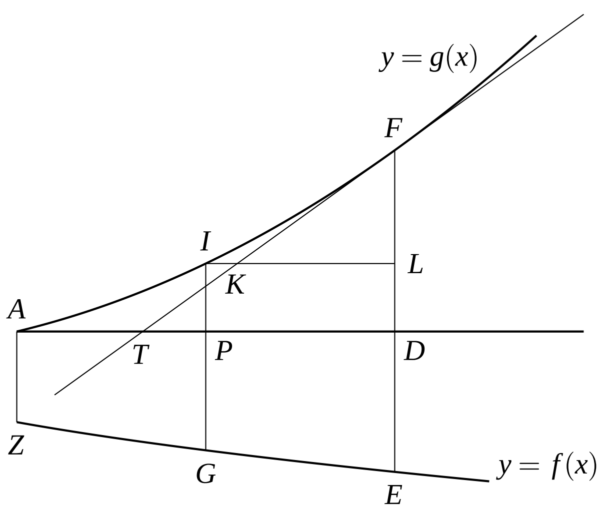


Figura 8. Teorema Fundamental

Tracemos una línea recta FT por F que corta en T a la recta AD y tal que

$$DF/TD = f(D) = DE$$

Queremos probar que FT es la tangente a $y = g(x)$ en el punto F. Para ello vamos a ver que la distancia horizontal, KL, de cualquier punto L de la recta EF a la recta FT es menor que la distancia, IL, de dicho punto L a la curva $y = g(x)$. Esto probará que la recta FT queda siempre por debajo de $y = g(x)$.

Tenemos que:

$$FL/KL = DF/TD = DE$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \text{área } ADEZ &= FD \\ \text{área } APGZ &= PI = LD \\ \text{área } PDEG &= FD - LD = FL \end{aligned}$$

Ya que

$$\text{área } PDEG < \text{rectángulo } PD.DE \tag{10}$$

Se sigue que

$$FL < PD.DE \longrightarrow DE > FL/PD$$

y por tanto

$$FL/KL > FL/PD \longrightarrow KL < PD = IL$$

Deducimos que el punto K queda debajo de la curva $y = g(x)$ y por tanto la recta FT queda a un lado de la curva. Para completar la demostración es necesario repetir el razonamiento tomando puntos a la derecha de EF. Esto prueba que TF es tangente a $y = g(x)$ en D y su pendiente es $DE = f(D)$. En términos actuales, lo que Barrow ha probado es que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

1.3. La relación fundamental entre cuadraturas y tangentes

1.3.1. El Teorema Fundamental del Cálculo según Newton

Newton desarrolló tres versiones de su cálculo. En la obra *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, que Newton entregó a su maestro Barrow en 1669, y que puede considerarse el escrito fundacional del Cálculo, Newton usa conceptos infinitesimales de manera similar a como hacía el propio Barrow. Este trabajo, además de contener el teorema binomial y los descubrimientos de Newton relativos a series infinitas, contiene también un claro reconocimiento de la relación inversa entre problemas de cuadraturas y de tangentes. La exposición que hace Newton de esta relación fundamental es como sigue. Supone una curva y llama z al área bajo la curva hasta el punto de abscisa x (ver figura 9). Se supone conocida la relación entre x y z. Aunque Newton explica su método con un ejemplo, queda perfectamente claro su carácter general. El ejemplo que

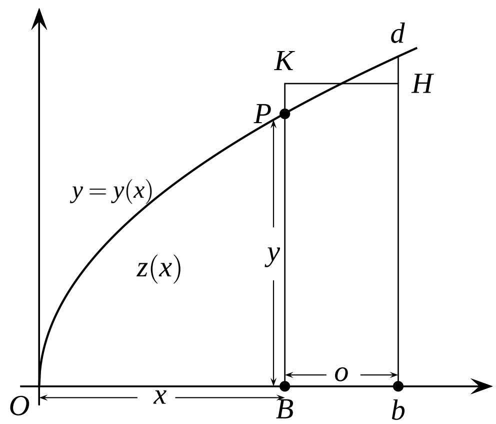


Figura 9. $z = z(x) =$ área OPB

Newton considera es

$$z = \frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}} \tag{11}$$

Pongamos, por comodidad $r = \frac{m+n}{n}$. Newton se imagina que el punto $P = (x, y)$ se mueve a lo largo de la curva y razona como sigue. Incrementemos la abscisa x a $x + o$ donde o es una cantidad infinitesimal o *momento*. Tomemos $BK = v$ de forma que $ov =$ área $BbHK =$ área $BbPd$. El incremento del área viene dado por:

$$ov = z(x+o) - z(x) = \frac{a}{r}(x+o)^r - \frac{a}{r}x^r \tag{12}$$

Desarrollando en potencias

$$\frac{a}{r}(x+o)^r = \frac{a}{r}x^r(1+o/x)^r = \frac{a}{r}x^r\left(1 + r\frac{o}{x} + \frac{r(r-1)}{2}\frac{o^2}{x^2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{o^3}{x^3} + \cdots\right) \tag{13}$$

De (12) y (13) deducimos, después de dividir por o, que:

$$v = ax^{r-1} + \frac{a(r-1)}{2}ox^{r-2} + \frac{a(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}o^2x^{r-3} + \cdots$$

Si en esta igualdad suponemos que o va disminuyendo hasta llegar a ser nada, en cuyo caso v coincidirá con y, después de eliminar los términos que contienen o que desaparecen, resulta que:

$$y = ax^{r-1} = ax^{\frac{m}{n}} \tag{14}$$

Este es, por tanto, el valor de la ordenada de la curva en $P = (x, y)$. El proceso puede invertirse y, de hecho, ya se sabía que la cuadratura de (14) viene dada por (11).

Observemos que Newton no ha usado el significado tradicional de la integral al estilo de sus predecesores, es decir, no ha interpretado la integral como un límite de sumas de áreas infinitesimales, sino que ha probado que la expresión que proporciona la cuadratura es correcta estudiando la variación momentánea de dicha expresión. De hecho, lo que Newton ha probado es que la razón de cambio del área bajo la curva, esto es, el cociente

$$\frac{z(x+o)-z(x)}{o}$$

se hace igual a la ordenada de la curva cuando o "se hace nada". En términos actuales, la derivada de $z(x)$ es la función $y = y(x)$. La relación simétrica entre cuadraturas y derivadas queda así puesta claramente de manifiesto. Para calcular cuadraturas, basta con calcular una antiderivada, lo que llamamos una primitiva de la función $y = y(x)$.

1.3.2. La invención del *calculus summatorius* por Leibniz

Las principales ideas que guiaron a Leibniz en la invención del Cálculo fueron:

- La creación de un simbolismo matemático que automatizara los cálculos y permitiera formular fácilmente procesos algorítmicos.
- La apreciación de que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarla recupera la sucesión inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas una de la otra.
- La consideración de las curvas como polígonos de infinitos lados de longitudes infinitesimales y de las variables como sucesiones que toman valores consecutivos infinitamente próximos.

Se conservan en el archivo Leibniz en Hannover los manuscritos que contienen las investigaciones de Leibniz sobre los problemas de cuadraturas. En dichos documentos, fechados del 25 de octubre al 11 de noviembre de 1675, Leibniz investiga la posibilidad de formular simbólicamente los problemas de cuadraturas e introduce los símbolos que actualmente usamos para la integral y la diferencial. Los progresos de Leibniz se exponen de forma concisa y clara en el trabajo de H.J.M. Bos [2] que sigo muy de cerca. Algunos de los resultados de Leibniz en estos manuscritos son casos particulares de la regla de integración por partes, como, por ejemplo, la siguiente igualdad (se supone $f(0) = 0$):

$$\int_0^a x f'(x)\,\mathrm{d}x = a f(a) - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = a \int_0^a f'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^a \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \tag{15}$$

Por supuesto, Leibniz no la escribe así. Recuerda que la notación que usamos para la derivada se debe a J.L. Lagrange y es bastante tardía, de finales del siglo XVIII. Además, la notación que usamos para indicar los límites de integración fue introducida por J. Fourier en el primer tercio del siglo XIX. Incluso el término "integral" no se debe a Newton ni a Leibniz. Leibniz llamó *calculus differentialis*, esto es "cálculo de diferencias", a la parte de su cálculo que se ocupa del estudio de tangentes, y *calculus summatorius*, o sea "cálculo de sumas", a la que se ocupa de problemas de cuadraturas. Para Leibniz una integral es una suma de infinitos rectángulos infinitesimales, el símbolo que ideó para representarlas, "$\int$" tiene forma de una "s" alargada como las que en aquel tiempo se usaban en la imprenta; además, es la primera letra de la palabra latina *summa*, o sea, "suma". Fue Johann Bernoulli quien, en 1690, sugirió llamar *calculus integralis* al cálculo de cuadraturas, de donde deriva el término "integral" que usamos actualmente.

De hecho, Leibniz obtuvo la fórmula (15) antes de inventar su notación para las integrales y las diferenciales. Es interesante mostrar cómo lo hizo. Para ello vamos a seguir el camino opuesto al seguido por Leibniz, modificando la notación de dicha fórmula hasta llegar a escribirla como lo hizo él.

Podemos interpretar gráficamente la igualdad (15) sin más que observar la figura 10.

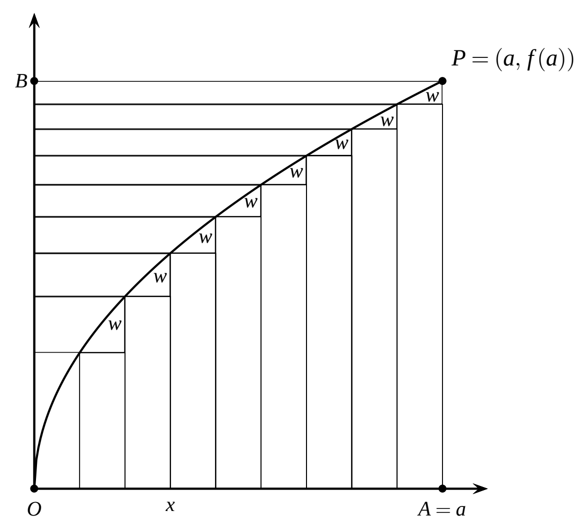


Figura 10. Áreas complementarias

El número $af(a)$ es el área del rectángulo *OAPB*, la integral $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ es el área de la parte de dicho rectángulo *OAP* que queda bajo la curva $y=f(x)$. Deducimos de (15) que la integral $\int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x$ es el área de la parte *OBP* de dicho rectángulo que queda por encina de la curva $y=f(x)$. Esta área es la suma de las áreas de rectángulos horizontales como los representados en la figura 10. Estos rectángulos horizontales tienen como base el valor de la abscisa correspondiente, x, y como altura la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas sucesivas, que Leibniz representa por w. Esta diferencia es lo que posteriormente se llamará diferencial de y. Podemos, pues, interpretar que $w = \mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$. Por su parte, el área de la región OAP es considerada por Leibniz como la suma de las ordenadas y. Finalmente, podemos eliminar y porque para Leibniz el valor de una variable puede obtenerse sumando sus diferencias consecutivas, por eso, y puede verse como la suma de las w. Esto equivale, en nuestra notación, a sustituir $f(x)$ por $\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ (o, al estilo de Leibniz, y por $\int \mathrm{d}y$), lo que también hemos hecho en la igualdad (15). La forma exacta en que Leibniz escribió la igualdad 15, según se lee en [2], es:

$$\text{omn.}\,\overline{xw} \sqcap \text{ult.}\,x, \overline{\text{omn.}\,w}, - \overline{\text{omn.}\,\text{omn.}\,w} \tag{16}$$

Aquí $\sqcap$ es el símbolo para la igualdad, "ult. x" significa el *ultimus* x, el último de los x, es decir, $OA = a$. El símbolo "omn." es la abreviatura de *omnes lineae*, "todas las líneas", símbolo que había sido usado por Cavalieri y que Leibniz usa con el significado de "una suma". Se usan también líneas por encima de los términos y comas donde ahora pondríamos paréntesis.

En un manuscrito posterior en algunos días, Leibniz vuelve a escribir la igualdad 16 en la forma:

$$\text{omn.}\,x\ell \sqcap x\,\text{omn.}\,\ell - \text{omn.}\,\text{omn.}\,\ell, \tag{17}$$

y observa que omn. antepuesto a una magnitud lineal como ℓ da un área; omn. antepuesto a un área como $x\ell$ da un volumen y así sucesivamente.

> [2]... Estas consideraciones de homogeneidad dimensional parecen haber sido las que sugirieron a Leibniz el usar una única letra en vez del símbolo "omn.", porque escribe a continuación: "Sería conveniente escribir "$\int$" en lugar de "omn.", de tal manera que $\int \ell$ represente omn.ℓ, es decir, la suma de todas las ℓ". Así fue como se introdujo el signo "$\int$" [...] E inmediatamente a continuación escribe Leibniz la fórmula (17) utilizando el nuevo formalismo:
>
> $$\int x\ell = x\int \ell - \int\int \ell \tag{18}$$
>
> haciendo notar que:
>
> $$\int x = \frac{x^2}{2} \quad \text{y} \quad \int x^2 = \frac{x^3}{3}$$
>
> y subrayando que estas reglas se aplican a "las series en las que la razón de las diferencias de los términos a los términos mismos es menor que cualquier cantidad dada", es decir, a las series cuyas diferencias son infinitamente pequeñas.
>
> Una líneas más adelante nos encontramos también con la introducción del símbolo "d" para la diferenciación. Aparece en el contexto de un brillante razonamiento que puede resumirse de la forma siguiente: el problema de las cuadraturas es un problema de suma de sucesiones, para lo cual hemos introducido el símbolo "$\int$" y para el que queremos elaborar un *cálculo*, es decir, un conjunto de algoritmos eficaces. Ahora bien, sumar sucesiones, es decir hallar una expresión general para $\int y$ dada la y, no es posible normalmente, pero siempre lo es encontrar

> una expresión para las diferencias de una sucesión dada. Así pues, el cálculo de diferencias es la operación recíproca del cálculo de sumas, y por lo tanto podemos esperar dominar el cálculo de sumas desarrollando su recíproco, el cálculo de diferencias. Para citar las mismas palabras de Leibniz:
>
>> Dada ℓ y su relación con x, hallar $\int \ell$. Esto se puede obtener mediante el cálculo inverso, es decir, supongamos que $\int \ell = ya$ y sea $\ell = ya/d$; entonces de la misma manera que la $\int$ aumenta las dimensiones, d las disminuirá. Pero la $\int$ representa una suma y d una diferencia, y de la y dada podemos encontrar siempre y/d o ℓ, es decir, la diferencia de las y.
>
> Así se introduce el símbolo “d” (o más bien el símbolo “$1/d$”). [. . .] De hecho, pronto se da cuenta de que ésta es una desventaja notacional que no viene compensada por la ventaja de la interpretación dimensional de la $\int$ y de d, y pasa a escribir “$d(ya)$” en vez de “ya/d”, y de ahí en adelante son interpretadas la d y la $\int$ como símbolos adimensionales [. . .].
>
> En el resto del manuscrito Leibniz se dedica a explorar este nuevo simbolismo, al que traduce viejos resultados, y a investigar las reglas operacionales que rigen la $\int$ y la d.

Esta larga cita, extraída del trabajo de H.J.M. Bos *Newton, Leibniz y la tradición leibniziana* ([2]), nos da una idea de cómo llegó Leibniz a la invención del cálculo. No fueron los caminos del razonamiento lógico deductivo los seguidos por Leibniz sino los de la intuición, la conjetura, el estudio de casos particulares y su generalización . . . Los mismos caminos que hoy siguen los matemáticos activos en sus trabajos de investigación. Pese a que los conceptos que maneja Leibniz son oscuros e imprecisos fue capaz de desarrollar algoritmos de cálculo eficaces y de gran poder heurístico. Como ya hemos indicado en el capítulo 6, el cálculo de Leibniz triunfó en el continente europeo gracias a los trabajos de los hermanos Bernoulli y al libro de texto del Marqués de L’Hôpital que divulgó las técnicas del cálculo leibniziano por toda Europa.

Referencias

[1] Kirsti Andersen. Las Técnicas del Cálculo, 1630-1660. En *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Alianza Editorial, S.A., 1984. 3

[2] Bos, H.J.M. Newton, Leibniz y la Tradición Leibniziana. En *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Alianza Eitorial, S.A., 1984. 3, 20, 22, 23

[3] González Urbaneja, P.M. *Las Técnicas del Cálculo: Fermat, Wallis y Roberval*. https://fundacionorotava.org/media/web/publication_files/publication23__a2_c016w.pdf. 3

[4] Israel Kleiner. History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48:137 – 174, 2001. 3